POVRŠINA MENGERJEVE SPUŽVE

Osnovni element Mengerjeve spužve je kocka, za katero vemo, da se površino izračuna kot $S = 6 \times a^2$. Prva kocka S_0 z osnovnico dolžine 1 ima torej ploščino 6. Po prvem koraku zmanjšamo osnovno kocko S_0 za 7 manjših kock s stranico $\frac{1}{3}$, tako da moramo prišteti površino 6×4 kvadratov.

$$S_1 = \frac{6 \times 8 \ + \ 6 \times 4}{9} = \frac{72}{9} = \ 8$$

V drugem koraku prištejemo $6 \times 4 \times 20$ kvadratov s površino $\frac{1}{81}$.

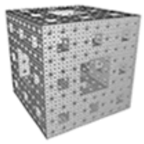
$$S_2 = \frac{(6 \times 8 \ + \ 6 \times 4) \times 8 \ + \ 6 \times 4 \times 20}{9 \times 9} = \frac{1056}{81} = \ 13.037$$

V tretjem koraku prištejemo $6 \times 4 \times 20 \times 20$ kvadratov s površino $\frac{1}{729}$.

$$S_3 = \frac{(6 \times 8 \ + \ 6 \times 4) \times 8 \times 8 \ + \ 6 \times 4 \times 20 \times 8 \ + \ 6 \times 4 \times (20 \times 20)}{9 \times 9 \times 9} =$$

$$= \frac{18048}{729} = \ 24.757$$

Za S_n sklepamo, da lahko površino Mengerjeve spužve zapišemo takole:



$$S_0 = 6$$

$$S_{n+1} = \frac{8}{9} S_n + \frac{24}{9} \times \left(\frac{20}{9}\right)^n$$

$$S_n = 4 \times \left(\frac{8}{9}\right)^n + 2 \times \left(\frac{20}{9}\right)^n$$

Ali lahko predpostavimo, da je n -ti korak površine Mengerjeve spužve
$S_n = 4 \times \left(\frac{8}{9}\right)^n + 2 \times \left(\frac{20}{9}\right)^n$?

Z indukcijo bomo sedaj pokazali, da je površina množice S_n enaka $4 \times \left(\frac{8}{9}\right)^n + 2 \times \left(\frac{20}{9}\right)^n$. Videli smo že, da formula velja za $n = 0, 1, 2, 3$. Sedaj privzemimo, da formula velja za množico S_n, ter pokažimo, da potem velja tudi za množico S_{n+1}. Torej:

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \frac{8}{9} S_n + \frac{24}{9} \times \left(\frac{20}{9}\right)^n = \\
&= \frac{8}{9} \times \left(4 \times \left(\frac{8}{9}\right)^n + 2 \times \left(\frac{20}{9}\right)^n\right) + \frac{24}{9} \times \left(\frac{20}{9}\right)^n = \\
&= \frac{8}{9} \times 4 \times \left(\frac{8}{9}\right)^n + \frac{8}{9} \times 2 \times \left(\frac{20}{9}\right)^n + \frac{24}{9} \times \left(\frac{20}{9}\right)^n = \\
&= 4 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n+1} + \left(\frac{20}{9}\right)^n \times \left(\frac{16}{9} \times 2 + \frac{24}{9}\right) = \\
&= 4 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n+1} + \left(\frac{20}{9}\right)^n \times \left(\frac{40}{9}\right) = \\
&= 4 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n+1} + \left(\frac{20}{9}\right)^n \times \left(2 \times \frac{20}{9}\right) = \\
&= 4 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n+1} + 2 \times \left(\frac{20}{9}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$